Über Pendel mit Quecksilber-Compensation.

Von **Dr. J. Böhm.**

(Vorgelegt in der Sitzung vom 23. April 1857.)

I.

Die mir übertragene Prüfung zweier, von unserem ausgezeichneten Kossek verfertigten Pendeluhren, gab mir Anlass — da diese Uhren mit Quecksilber-Pendeln versehen sind — mich mit dieser Compensation etwas eindringlicher zu beschäftigen.

Diese Compensations-Form gehört, ungeachtet mannigfacher Einwendungen die man gegen dieselbe macht, doch noch immer zu den einfachsten und besten, und steht desshalb in häufiger Anwendung bei astronomischen Uhren. Wie noch so vieles dem Praktiker ganz allein zur Ausführung überlassen wird, was vom Theoretiker genau vorgezeichnet sein sollte, d. h. wie noch immer gar zu häufig Theorie und Praxis ihre Wege abgesondert wandern, während doch nur deren Vereinigung den Höhepunkt im Betriebe zu erklimmen vermag, so ist es auch noch in der Uhrmacherkunst. Für die Anordnung des Pendels (und für manches andere) bestehen wenig vollständige Vorschriften, sie ist, so zu sagen, der Einsicht des Künstlers allein anheimgestellt. Dass man unter solchen Umständen nicht erwarten darf, die Uhr werde so vollkommen aus der Hand des Erzeugers hervorgehen, dass an ihr weiter nichts zu reguliren wäre, versteht sich von selbst.

Glücklicher Weise hat dies keine Folgen, wenn nur die Verhältnisse nahezu getroffen sind und das Werk so eingerichtet ist, dass es kleine, die Regulirung des Ganges der Uhr ermöglichende Correctionen leicht zulässt.

Bei Quecksilber-Pendeln, auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken, wird die Regulirung der Compensation durch Zugabe oder durch Wegnahme k l e i n e r Quantitäten von Quecksilber vollführt. So findet man die Sache gewöhnlich dargestellt. Allein diese kleinen Quantitäten Quecksilber setzen voraus, dass die absolute Quantität Quecksilber, von Anfang her schon s e h r n a h e getroffen sei, da sich

sonst, wie wir unzweifelhaft zeigen werden, die kleinen Quantitäten in ziemlich grosse verwandeln.

Um die absolute zur Compensation nothwendige Menge Quecksilber zu ermitteln, werden Berechnungen angestellt die, um recht einfache und gefällige Formeln zu erhalten, von Voraussetzungen ausgehen, die der Wirklichkeit ferne stehen und die daher auch zu wesentlich unbrauchbaren Resultaten führen müssen, und thatsächlich auch führen.

Was die Zugabe oder Wegnahme von kleinen Quantitäten Quecksilber betrifft, so erscheint diese Operation an sich sehr einfach, während sie in der That sehr mühevoll und langwierig wird, wenn es sich um vollste Schärfe, die man doch stets vor Augen haben soll, handelt. Jedem, der sich mit der Behandlung von Uhren befasst hat, ist bekannt, dass es eines längeren Zeitraumes bedarf, um sich der Abhängigkeit des täglichen Ganges der Uhr von der Temperatur zu versichern. Man muss den Gang der Uhr bei niedriger und bei bedeutend höherer Temperatur erprobt, man muss, mit andern Worten, Winter und Sommer oder doch Frühjahr und Sommer etc. benützen, um zu einem verlässlichen Resultate zu gelangen. Hat man nun, um die Compensation zu reguliren, eine kleine Quantität Quecksilber zugegeben oder weggenommen, so wird man wieder lange Zeit abwarten müssen, um sich zu überzeugen, ob man das richtige Quantum getroffen habe oder nicht u. s. w.

Ein solches Vorgehen mag dort Anwendung finden, wo keine anderen Wege zum Ziele führen, in anderem Falle ist es vortheilhaft auf directem Wege vorzugehen. Es lässt sich vermuthen, dass dies bei dem vorliegenden Gegenstande angehen, und dass eine genauere Betrachtung eines solchen Pendels auf directem Wege zum Ziele führen werde.

Zwei Dinge sind es, um die es sich hier handelt, und zwar:

1. um die sehr genäherte Bestimmung der zur vollständigen Compensation nöthigen absoluten Quecksilbermenge, und dann
2. um die Ermittlung der Abhängigkeit des Compensations-Verhältnisses von kleinen Änderungen der absoluten Quecksilbermenge.

Betrachten wir ein Quecksilber-Pendel vorerst in seiner einfachsten Form. In solcher wird es repräsentirt durch eine Stahl-



Stange $w\ v$, die bei w aufgehängt ist, und eine Quecksilbermasse $p\ v$, die von der Stange durchdrungen und in v mit ihr fest verbunden ist. Jedes anders geformte Pendel dieser Kategorie wird sich auf die vorliegende Form ohne Anstand zurückführen lassen. Dabei darf man von dem Umstande, dass das Quecksilber in einem Gefässe eingeschlossen sein müsse, gänzlich absehen und sich $p\ v$ als eine starre Masse vorstellen.

Es seien die Längen

$$\omega v = l$$

$$p v = h$$

für die Temperatur von 0° R.

Ferner sei

g das Gewicht der Stange,
q „ „ des Quecksilbers,

und

μ und n

seien die Ausdehnungs-Coëfficienten für Stahl und Quecksilber für einen Grad Reaumur.

Beziehen wir alle Momente auf den Punkt ω, so ist vorerst das statische Moment der Stange

$$S = g \cdot \frac{l}{2}$$

und dessen Änderung

$$dS = g\frac{l}{2} \cdot \mu = S \cdot \mu.$$

Bezeichnen wir das statische Moment des Quecksilbers durch S', so ist dagegen (1)

$$S' = q\left(l - \frac{h}{2}\right)$$

und

$$dS' = q\left(l\mu - \frac{h}{2}n\right).$$

Um die Momente der Trägheit zu entwickeln, hätte man auf die Durchmesser der Stange und des Quecksilbers — wenn man sich beide Objecte cylindrisch vorstellt — Rücksicht zu nehmen. Da aber an der Sache dadurch verhältnissmässig nur wenig geändert wird, und es sich hier nur um eine allgemeine Übersicht der Verhältnisse der Compensation handelt, so wird es erlaubt sein hievon vorläufig

ganz abzusehen. Bezeichnen wir die Momente der Trägheit der Stange und des Quecksilbers durch K und K', so ist unter der genannten Beschränkung

$$K = g\frac{l^2}{3}$$
$$dK = \frac{2}{3} g l^2 \mu = 2 K \mu. \tag{2}$$

Für das Quecksilber ist aber

$$K' = Q\frac{l^2}{3} - \frac{Q'(l-h)^2}{3};$$

wo Q dasjenige Gewicht vorstellt, welches eine mit der Pendelstange gleich lange Quecksilbermasse hätte, Q' das Gewicht von der Länge $\omega\, p$. Da nun offenbar

$$Q = q\frac{l}{h}; \quad Q' = q\frac{(l-h)}{h}$$

ist, so wird auch

$$K' = q\left\{l^2 - lh + \frac{h^2}{3}\right\} \tag{3}$$

und

$$dK' = q\left\{2\,l^2\mu - lh\,(\mu + n) + \frac{2}{3}h^2 n\right\}. \tag{4}$$

Ist nun L die Länge desjenigen mathematischen Pendels, das mit dem vorliegenden physischen isochron schwingt, so ist bekanntlich

$$L = \frac{K + K'}{S + S'} \tag{5}$$

und daher auch

$$dL = \frac{dK + dK'}{S + S'} - \frac{(dS + dS')}{S + S'}\,.\,L. \tag{6}$$

Soll das Pendel vollkommen compensirt sein, so darf L in Folge der Temperatur keine Änderung erleiden, d. h. es muss

$$(dK + dK') - (dS + dS')\,L = 0 \tag{7}$$

sein.

Setzen wir für dk und $d\,k'$ u. s. w. ihre Werthe, so erhalten wir für die Compensation die Bedingungsgleichung

$$\frac{2}{3} g\, l^2 \mu + q\left\{2\, l^2 \mu - lh\,(\mu + n) + \frac{2}{3}h^2 n\right\} = \\ = L\left\{g\frac{l}{2}\mu + q\left(l\,\mu - \frac{hn}{2}\right)\right\}. \tag{8}$$

Die Gleichung (8) zeigt, dass eine Compensation in voller Allgemeinheit nicht möglich ist; was übrigens auch für jede andere Compensations-Form gilt. Wenn eine exacte Compensation möglich ist, so ist sie dies jedenfalls nur für einen bestimmten Werth von L.

Es ist jedoch nicht schwer einzusehen, dass eine mässige Änderung des Werthes von L, selbst für die genaueste Praxis, keinen merklichen Einfluss auf die Compensation ausüben werde, so dass die berührte Beschränkung nur eine theoretische Bedeutung erhält. In Folge dieses günstigen Umstandes ist eine der zu untersuchenden Grössen, nämlich L, durch die Natur der Sache oder, besser gesagt, dadurch gegeben, dass man sich für eine bestimmte Zeit entscheidet, nach welcher die Uhr gehen soll.

Nehmen wir L als gegeben an, so haben wir es noch mit den Grössen g, q, h und l zu thun, von denen nur eine durch die Gleichung (8) bestimmt werden kann. Da aber gleichzeitig auch die Gleichung (5) zu bestehen hat, so lassen sich zwei der vorbenannten Grössen bestimmen, während die zwei anderen unbestimmt, respective dem Ermessen des Künstlers überlassen bleiben. Für diese letzteren wird man füglich g und q nehmen dürfen.

Diese Gewichte stehen inzwischen zu einander und zu dem Ganzen nicht ausser aller Beziehung. Vorerst ist es ein unabweisbares Erforderniss, der Pendellinse ein angemessenes Gewicht zu geben. Das Pendel muss hinreichende Kraft haben zur Beherrschung der sich seiner Bewegung in den Weg stellenden mannigfachen Einflüsse, und um die Hemmung unter allen Umständen mit Sicherheit zu vollbringen. Je nach der Beschaffenheit des Werkes wird die Linse ein grösseres oder ein kleineres Gewicht haben müssen, was der Künstler zu beurtheilen hat und auch zu beurtheilen vermag.

Wir können somit q, das Gewicht des Quecksilbers als gegeben ansehen. Von der Grösse dieses Gewichtes wird andererseits die, ad minimum nöthige Stärke, also das Gewicht g der Pendelstange abhängen; indem sie einerseits stark genug sein muss die schwingende Last zu ertragen, dann aber wieder eine mehr als nothwendige Stärke derselben zu vermeiden ist. Man wird, ohne dadurch eine störende Beschränkung in unsere Betrachtungen einzuführen, zwischen den Gewichten q und g ein bestimmtes Verhältniss annehmen können; wofür bei einem factisch vorliegenden Pendel das thatsächliche Verhältniss zu nehmen sein wird.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$g = p \cdot q,$$

so entfallen g und q gänzlich aus den Gleichungen (5) und (8) und diese werden:

$$3\{(2+\rho)l - h\} L = 2\{(3+\rho)l^2 - 3lh + h^2\} \qquad (9)$$

und

$$2\left(\frac{\rho}{3}+1\right)l^2\mu - lh(\mu+n) + \frac{2}{3}h^2 n = \left\{\left(\frac{\rho}{2}+1\right)l\mu - \frac{hn}{2}\right\}.L \qquad (10)$$

Setzt man der leichteren Übersicht wegen, in der ersteren dieser Gleichungen

$$2(\rho+3) = \alpha$$
$$bh + 3(\rho+2)L = \beta$$
$$(3L+2h)h = \gamma$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha} = \beta_0; \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma_0,$$

so wird sofort

$$l = \frac{\beta_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2_0 - 4\gamma_0}{2}} \qquad (11)$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (10)

$$2\left(\frac{\rho}{3}+1\right)\mu = a$$
$$h(n+\mu) + L\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\mu = b$$
$$\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}h\right)hn \quad = c$$

und

$$\frac{b}{a} = b_0$$
$$\frac{c}{a} = c_0$$

so wird auch

$$l = \frac{b_0}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2_0 - 4c_0}}{2} \qquad (12)$$

Dadurch gelangt man zu der Endgleichung

$$b_0 \pm \sqrt{b^2_0 - 4c_0} = \beta_0 \pm \sqrt{\beta^2_0 - 4\gamma_0} \qquad (13)$$

in welcher blos die Variable h enthalten ist, die daher auch aus ihr gefunden werden kann. Eine directe Auflösung der Gleichung (11)

dürfte inzwischen ziemlich umständlich werden, auf indirectem Wege bietet die Auffindung des Werthes von h keine Schwierigkeiten dar.

Nehmen wir zu diesem Ende an, es sei x ein genäherter Werth von h und $x+dx$ der wahre. Setzen wir dann die mit dem Werthe von

$$h=x$$

berechneten Ausdrücke

$$b_0 \pm \sqrt{b^2_0 - 4c_0} = A$$

$$\beta_0 \pm \sqrt{\beta^2_0 - 4\gamma_0} = B$$

und überdies

$$\frac{dA - dB}{dh} = M.$$

so erhalten wir sofort

$$dx = \frac{(B-A)}{M} \qquad (14)$$

Ist der für dx gefundene Werth gross, so werden die Ausdrücke

$$A + \left(\frac{dA}{dh}\right) dx = A'$$

$$B + \left(\frac{dB}{dh}\right) dx = B'$$

einander nicht gleich sein. Man erhält aber sofort eine fernere Correction von dx durch den Ausdruck

$$dx' = \frac{B' - A'}{M},$$

und es ist dann

$$h = x + dx + dx'. \qquad (15)$$

Ist dx nicht allzugross, so wird man für M, in dieser zweiten Rechnung, den aus der ersten Rechnung resultirenden Werth behalten können.

Um das Gesagte an einem Beispiele zu erläutern, nehme ich an, es sei bei einem Pendel

$$\rho = 0{\cdot}30.$$

Soll die Uhr nahezu nach Sternzeit gehen, so wird

$$L = 450^{\prime\prime\prime}70 \text{ Wiener Klafter}$$

zu nehmen sein. Ferner ist

$$\mu = 0{\cdot}0000144$$
$$n = 0{\cdot}0002252.$$

Als genäherten Werth von h nehme ich $h = 73'''0$ an. Damit finde ich

$$A = 1014 \cdot 90$$
$$B = 1007 \cdot 99$$
$$\left(\frac{dA}{dh}\right) = 13 \cdot 57\, h$$
$$\left(\frac{dB}{dh}\right) = 0 \cdot 889,$$

mithin auch

$$dx = -0'''478.$$

Mit diesem Werthe von dx erhält man ferner

$$A' = 1008 \cdot 42$$
$$B' = 1007 \cdot 57,$$

daher auch

$$dx' = -\ 0'''059.$$

Hieraus ergibt sich der vollständige Werth von h

$$h = 72'''46. \qquad (16)$$

Mit diesem Werthe findet man

$$A' = 1007'''6$$
$$B' = 1007 \cdot 5,$$

was der Rechnung zur Controle dient.

Da aber

$$A = B = 2l$$

ist, so erhält man gleichzeitig unmittelbar

$$l = 503'''8 \text{ W. M.} \qquad (17)$$

Berechnet man mit den für h und l gefundenen Werthen die Änderungen dK, dK', dS und dS', so erhält man

$$dK + dK = 0 \cdot 0824$$
$$(dS + dS')\, L = 0 \cdot 0827,$$

wodurch die Bedingungsgleichung (7), da nur mit 5stelligen Logarithmen gerechnet wurde, — hinreichend genau erfüllt wird.

Hätten wir die Rechnung mit der Annahme

$$\rho = 0 \cdot 0$$

die gewöhnlich gemacht zu werden pflegt, durchgeführt, so würden wir sehr nahe

$$h = 64'''8$$
$$l = 481 \cdot 6 \qquad (18)$$

erhalten haben; was mit der eingangs besprochenen gewöhnlichen Anschauungsweise übereinkömmt. Wir sehen hieraus aber ganz klar, in welchem Grade die Vernachlässigung des Gewichtes der Stange störend auf das gesuchte Resultat einwirken kann, indem ihr allein die Differenz der beiden für h gefundenen Werthe (16) und (18), die

$$7'''7$$

beträgt, zur Last fällt. Eine solche Differenz wird aber keineswegs durch kleine Quecksilbermengen ausgeglichen; dazu wird bei den gewöhnlichen Dimensionen solcher Pendel, etwa ein ganzes Pfund Quecksilber erfordert, das in der That nicht einige, sondern einige tausende Tropfen beträgt.

II.

Die eben geschlossenen Betrachtungen werden, wo es sich um Construction eines Quecksilber Pendels handelt, sichere Anhaltspunkte zur Bestimmung der geeigneten Dimensionen gewähren. Ein darnach eingerichtetes Pendel wird bezüglich der Compensation nur wenig zu wünschen übrig lassen. Anders wird sich die Sache aber mit einem bereits fertigen Pendel verhalten unter der Annahme, dass es nicht vollständig compensirt sei. Hier wird die Frage entstehen, wie der mangelhaften Compensation nachzuhelfen sei. Dass dies am einfachsten durch Regulirung der Quecksilbermenge geschehen wird, ist für sich selbst klar, und es wird sich nur darum handeln die dazu benöthigte Quecksilber-Quantität durch Rechnung zu bestimmen, so wie auch die Wirkung zu untersuchen, die dies auf den Gang der Uhr ausüben werde.

Nehmen wir an, es seien für ein bestimmtes Pendel die Grössen l, h und ρ gegeben, und N sei die Anzahl der Schwingungen, die das Pendel in einem mittleren Tage macht.

Da bekanntlich überhaupt, wenn g die Schwere, t die Dauer einer Schwingung, L die Länge des mathematischen Pendels ausdrückt,

$$L = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cdot g$$

ist, so ist auch

$$L = \left(\frac{86400}{\pi N}\right)^2 \cdot g$$

und zugleich

$$dL = -\frac{2L}{N} \cdot dN$$

oder (19)

$$dN = -\frac{N}{2L} \cdot dL.$$

Hier drückt dN die Änderung des täglichen Ganges der Uhr, und insbesondere $+dN$ die Zunahme der täglichen Acceleration aus.

Die Unterscheidung zwischen Acceleration und Retardation ist in der Praxis sehr umbequem und störend; bequemer ist es sich der sogenannten Correction der Uhr und ihrer täglichen Änderung (ξ) zu bedienen. Nehmen wir die Correction der Uhr immer so, dass sie mit ihrem Zeichen zur Uhrzeit addirt die richtige Zeit gibt, und bezeichnen wir die Änderung derselben durch $d\xi$, so ist offenbar

$$d\xi = -dN,$$

daher auch

$$dL = 2\frac{L}{N} \cdot d\xi$$

$$d\xi = \frac{N}{2L} \cdot dL. \qquad (20)$$

Setzen wir nun voraus, dass $d\xi$ (für 1 Grad Temperatur-Zunahme) durch Beobachtungen genau bekannt sei, so ist durch Gl. (20) so fort auch die factische Änderung von L gegeben, die zur Erzielung der vollständigen Compensation auf 0 gebracht werden muss.

Unter diesen Verhältnissen wird die Gleichung (6)

$$2\frac{L}{N}d\xi = \frac{dK + dK'}{S + S'} - \frac{(dS + dS')}{(S + S')} \cdot L.$$

Sind nun S_0, K_0, ... dS_0, dK_0, ... die Änderungen der Grössen S, K, ... dS, dK, ..., die dadurch entstehen, dass l und h in $l + dl$ und in $h + dh$ übergehen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$\frac{dK_0 + dK_0'}{(S + S')} - \frac{(dS_0 + dS_0')}{(S + S')} \cdot L + 2\frac{L}{N}d\xi = 0. \qquad (21)$$

Setzt man der leichteren Übersicht wegen

$$\left\{4\left(\frac{\rho}{3} + 1\right)l - \left(\frac{\rho}{2} + 1\right)L\right\}\mu - h(\mu + n) = u(S + S')$$

$$\left(\frac{4}{3}h + \frac{L}{2} - l\right)n - l\mu = w(S + S')$$

und

$$2\frac{L}{N}\,.\,d\xi = C,$$

so geht die Gl. (21) über in

$$udl + wdh + C = 0. \qquad (22)$$

Da nun aber durch die Änderungen von h und l der Gang der Uhr, d. h. L nicht geändert werden soll, so erhalten wir aus (5) die zweite Bedingungsgleichung

$$(K_0 + K_0') - (S_0 + S_0')\,.\,L = 0; \qquad (23)$$

oder wenn

$$2\left(\frac{\rho}{3}+1\right)l - \left(\frac{\rho}{2}+1\right)L - h = u'$$

$$\left(\frac{2h}{3}+\frac{L}{2}-l\right) = w'$$

gesetzt wird,

$$u'dl + w'dh = 0. \qquad (24)$$

Die Bedingungsgleichungen (22) und (24) geben unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} dh &= -\frac{u'}{(wu'-w'u)}\,.\,C \\ dl &= \frac{w'}{wu'-w'u}\,.\,C; \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Um auch diesen Fall durch ein Zahlen-Beispiel zu beleuchten, nehmen wir an es seien bei einem Pendel, für welches

$$\rho = 0\cdot30$$
$$L = 450'''00$$

sein soll,

$$h = 74'''00$$
$$l = 504'''40$$

gemacht worden. Dabei sei durch Beobachtungen gefunden worden, dass dieses Pendel für jeden Grad der Temperatur-Zunahme täglich um 0·0152 Schläge accelerire, so dass

$$d\xi = -0\cdot0152$$

wird, wie dies in der Wirklichkeit nahezu der Fall sein würde.

Unter diesen Annahmen finden wir

$$u = 0\cdot00001248$$
$$w = -0\cdot00008831$$

$$C = -\ 0{\cdot}0001598,$$
$$u' = 518{\cdot}2$$
$$\omega' = -230{\cdot}1;$$

daher auch aus Gl. (25)

$$dh = -1'''9$$
$$dl = -0{\cdot}8. \qquad (26)$$

Man wird also, um die Compensation zu vervollständigen, die Quecksilberhöhe um 1‴9 vermindern und gleichzeitig die Pendelstange um 0‴8 verkürzen müssen. Man erhält dann

$$h = 72'''1$$
$$l = 503{\cdot}6$$

was sehr nahe die früher (16) und (17), für ein unter ähnlichen Verhältnissen stehendes Pendel, gefundenen Werthe sind.

Eine Quecksilbersäule von 1‴9 Höhe entspricht, bei den gewöhnlichen Dimensionen der Gefässe solcher Pendel, einer Quecksilber-Menge von beiläufig

8·34 Wiener Loth.

Wenn man nun bedenkt dass diese keineswegs gar so unerhebliche Quecksilber-Quantität in dem vorliegenden Falle, wo die Compensation bis auf die sehr kleine Grösse von

0‴015

täglicher Änderung für 1 Tag und 1 Grad Temperatur-Änderung schon hergestellt war — zur gänzlichen Regulirung der Compensation erfordert wird, so kann man sich leicht eine Vorstellung von den Quecksilber-Massen machen, deren man benöthiget, um eine von vorne herein weniger gelungene Compensation zu reguliren.

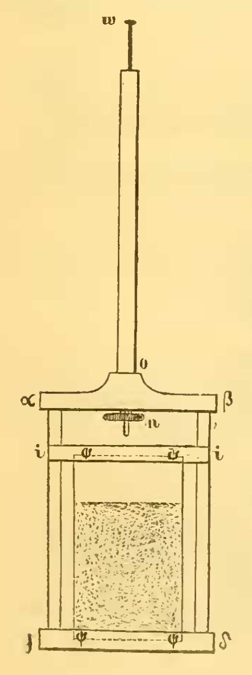
III.

Auf diese Weise wird es möglich die genaue Regulirung der Compensation mit Sicherheit und in aller Kürze zu vollbringen. Allein man darf dabei nicht vergessen, dass wir die einfachste Form des Pendels zur Vorlage unserer Betrachtungen genommen, und von den besonderen Formen der einzelnen Bestandtheile desselben gänzlich abgesehen haben. Diese Formen mit ihren ungleich vertheilten Massen werden zwar auf den Gang der Betrachtungen keinen Einfluss haben, aber sie werden gewisse Änderungen in den Momenten mit sich bringen, die nicht vernachlässiget werden dürfen.

Wollte man diese Formen in aller Schärfe berücksichtigen, so würde die Rechnung dadurch ungemein verwickelt werden, wesshalb es unerlässlich wird hierin, aber auch nur hierin, gewisse Vereinfachungen eintreten zu lassen. Diese werden mit Umsicht erwählt, einen nur sehr untergeordneten Einfluss auf das Resultat ausüben; einen grösseren wird die nicht genaue Kenntniss der Ausdehnungs-Coëfficienten nach sich ziehen.

Man hat in der Regel kein Mittel die factischen Werthe dieser Coëfficienten in vorhinein kennen zu lernen, dies gilt insbesondere von den Ausdehnungs-Coëfficienten des Quecksilbers. Die Versuche die man darüber gemacht hat, beziehen sich alle auf luftleeres Quecksilber, während jenes in den Pendeln sich keineswegs in diesem Zustande befindet.

Alle diese Ursachen zusammengenommen werden als die Ursache zu betrachten sein von den Differenzen, die sich, in einem vorliegenden Falle, zwischen der Rechnung und der Beobachtung ergeben, und es wird nicht uninteressant sein dies an einem thatsächlich vorliegenden Pendel zu erproben. Als solches erwähle ich jenes von der Uhr „Kossek Nr. II,“ und zwar desshalb, weil mir dieses Pendel, ehevor die Uhr im Gange war, zur Hand kam, wodurch es mir möglich wurde die meisten seiner Bestandtheile abzumessen und abzuwägen, so dass ich dessen Dimensionen als nahe genug bekannt ansehen darf; die Einrichtung dieses Pendels weicht von der gewöhnlichen Einrichtung solcher Pendel, wie man sie vorzüglich bei englischen Uhren trifft, nicht ab, und sind auch die Dimensionen der wichtigsten Bestandtheile den bei bereits bestehenden guten Pendeln entnommen. Des leichteren Verständnisses wegen ist es hier in seinen allgemeinen Umrissen abgebildet.



Es bezeichnet ω den Aufhängepunkt des Pendels; ωo ist, mit Ausnahme der sehr kurzen Feder an welcher das Pendel hängt, eine runde Stahlstange, mit welcher der Bügel $\alpha\beta\gamma\varsigma$ in Verbindung steht. Diese

Stange geht bei o durch das massive Messingstück $\alpha\beta$, und wird durch die Schraubenmutter π verkürzt oder verlängert. Das benannte Messingstück $\alpha\beta$ ist von wenig bestimmbarer Form und steht mit der cylindrischen Messing-Fassung $\gamma\varsigma$, durch Hilfe der zwei schwachen Stahlstangen $\alpha\gamma$ und $\beta\varsigma$, in fester Verbindung.

Die Fassung $\gamma\delta$ ist etwa eine Linie tief ausgedreht, um dem cylindrischen Glase $\psi\psi\psi\psi$ einen sicherern Stand zu gewähren, und das Glasgefäss wird durch eine analoge Fassung ii geschlossen. Im Gefässe selbst ist das Quecksilber durch Punktirung angedeutet.

Bei diesen Form-Verschiedenheiten werden die Momente der einzelnen Bestandtheile separat berechnet werden müssen, wodurch die Sache ziemlich verwickelt und beschwerlich wird.

Beziehen wir alles auf die Aufhängungsaxe des Pendels, die wir zur Axe der Z, ihre Mitte als Anfangspunkt der Coordinaten betrachten; nehmen wir ferner die durch die Mitte der Stange ωo gehenden Grade als Axe der x, eine darauf senkrechte als Axe der y an, so ist, wenn φ das Gewicht eines Massen-Theilchens dessen Lage durch x, y, z gegeben ist, bezeichnet, das statische Moment dieses Elementes

$$= \varphi . x.$$

Das Moment der Trägheit aber (a)

$$= \varphi (x^2 + y^2)\, dx . dy . dz.$$

Während nun für den ganzen Körpertheil, dem dieses Element angehört, das statische Moment durch

$$\varphi \Sigma (x) \text{ oder bequemer durch } \varphi [x] \qquad (b)$$

ausgedrückt werden kann, wo der Kürze wegen

$$[x] \text{ statt } x + x' + x'' + \ldots$$

geschrieben wurde, erhalten wir für das Moment der Trägheit den Ausdruck

$$\varphi \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad (c)$$

wo die Integrationen innerhalb der Grenzen der Ausdehnung des Körpertheiles zu erstrecken sind. Wenden wir diese allgemeinen Formeln auf die einzelnen Bestandtheile unseres Pendels an, so erhalten wir die folgenden besonderen Resultate.

1. Die Pendelstange ωo. Die Länge derselben sei a, deren halbe Breite b, die halbe Dicke c, und ihr Gewicht m. Es ist dann offenbar ihr

$$\text{statisches Moment} \quad s = m\frac{a}{2}$$

$$\text{Mom. der Trägheit} \quad k = \frac{m}{3}(a^2 + b^2).$$

Ich fand nun nahezu

$$m = 0{\cdot}742 \text{ Pfund}, \quad b = 1'''60,$$

daher wird auch

$$s = 0{\cdot}371 . a$$
$$k = 0{\cdot}2473 . a + 0{\cdot}633.$$

2. Das Querstück des Bügels $\alpha o \beta$. Dieser Bestandtheil hat eine zur Berechnung sehr ungute Form. Man wird sich jedoch von der Wahrheit nicht allzuviel entfernen, wenn man dieses Stück in ein Parallelopiped von einer etwa $2'''0$ grösseren Höhe als $o\pi$ ist, verwandelt. Thut man dieses, so erhält man mit Rücksicht auf die gemessenen Dimensionen: Die Höhe des Prisma $\psi = 24'''0$, dessen halbe Breite $b = 20'''0$. Es wird dann nach (o) das statische Moment

$$s = ma + m\frac{\psi}{2}$$

und das Moment der Trägheit

$$K = m\left\{a^2 + a\psi + \frac{\psi^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right\}.$$

Da nun das Gewicht $m = 0{\cdot}651$ Pfd. ist, so wird

$$s = 0{\cdot}651 . a + 7{\cdot}812$$
$$K = 0{\cdot}651\, a^2 + 15{\cdot}624\, a + 211{\cdot}78.$$

3. Die Schraubenmutter π sammt Schraube kann als ein Massen-Element angesehen werden, dessen Abstand vom Punkte $\omega = a + o\pi$ ist. Setzen wie $o\pi = \xi$, so wird sofort

$$s = m(a + \xi)$$
$$K = m(a + \xi)^2.$$

Nun ist aber

$$m = 0{\cdot}071 \text{ Pfund}, \quad \xi = 23'''5$$

gefunden worden, demnach wird auch

$$s = 0{\cdot}071 . a + 1{\cdot}668$$
$$K = 0{\cdot}071 . a^2 + 3{\cdot}337 . a + 39{\cdot}200.$$

4. Die cylindrischen Fassungen ii und $\gamma\delta$. Diese Scheiben sind Cylinder von geringer Höhe und etwa bis über die halbe Höhe ausgedreht. Ohne sich einer wesentlichen Ungenauigkeit auszusetzen, kann man den Schwerpunkt derselben nahezu in der Mitte ihres massiven Theiles annehmen. Bezeichnen wir den Abstand dieses Punktes von o durch ξ, so haben wir wieder

$$s = m(a + \xi').$$

Die Auffindung des Moments der Trägheit bedarf inzwischen einer kleinen Erwägung. Betrachten wir das Integrale

$$\varphi \iiint (x^2 + y^2)\, dx . dy . dz,$$

so sind, wenn wir durch r den Halbmesser der genannten Cylinder bezeichnen, die Grössen y und z durch die Bedingung

$$y^2 + z^2 = v^2$$

verbunden. Die erste Integration muss desshalb innerhalb der Grenzen

$$Z = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$$

ausgeführt werden. Geschieht dies und integrirt man dann von $y = - r$ bis $y = + r$, so wie von $x = o$ bis $x = a + \xi + h$, wo h die Höhe des Cylinders, ξ den Abstand seiner oberen Basis vom Punkte o ausdrückt, so erhält man

$$K = \varphi \pi r^2 \left\{ \frac{(a + \xi + h)^3}{3} + (a + \xi + h) \frac{r^2}{4} \right\},$$

oder wenn man bedenkt, dass

$$\varphi \pi r^2 h = m$$

das Gewicht des Cylinders ist, auch

$$K = m \left\{ (a + \xi)^2 + (a + \xi) + \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right\}.$$

Da wir aber in dem vorliegenden Falle wegen der geringen wirksamen Höhe dieser Cylinder $h = o$ setzen, dagegen aber ξ bis zur Mitte der Scheibe ausdehnen dürfen, so erhalten wir für das Moment der Trägheit ganz einfach

$$K = m \left\{ (a + \xi') + \frac{r^2}{4} \right\};$$

für den oberen Cylinder fand ich

$$m = 0{\cdot}270 \text{ Pfund}, \quad \xi' = 38'''9 \quad r = 15'''8,$$

für den unteren

$$m = 0{\cdot}390 \text{ Pfund}, \quad \xi' = 130'''0 \quad r = 15{\cdot}8.$$

Daher wird für die obere Scheibe

$$s = 0{\cdot}270 . a + 10{\cdot}50$$
$$K = 0{\cdot}270 . a^3 + 21{\cdot}006 . a + 425{\cdot}42,$$

für die untere:

$$s = 0{\cdot}390 . a + 50{\cdot}70$$
$$K = 0{\cdot}390 . a^2 + 101{\cdot}400 . a + 5784{\cdot}08.$$

5. Die zwei Seitenstangen des Bügels $\alpha\,\gamma$ und $\beta\,\delta$.

Ist m das Gewicht beider, λ ihre innere Länge und ξ die Höhe $o\,\pi$, so ist

$$s = m\left(a + \xi + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Das Moment der Trägheit erhält man aus dem Ausdrucke (c), wenn man ihn innerhalb der Grenzen

$$z = \pm c, \quad y = \pm(b + n) \text{ und von } \chi = a + \xi \text{ bis } \chi = u + \xi + \lambda$$

integrirt. Hier bezeichnet n die Breite der Stangen und h den Abstand ihrer inneren Seite von der Axe der X. Führt man die angedeuteten Operationen aus, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$2\,\xi + \lambda = A$$
$$\zeta^2 + \xi\lambda + \frac{\lambda^2}{3} + b^2 + \frac{b\,n}{3} + \frac{n^2}{3} = B$$

gesetzt wird,

$$K = m\,\{a^2 + A\,a + B\}.$$

Da nun bei unserem Pendel

$$m = 0{\cdot}273 \text{ Pfund}, \quad \xi = 22'''0 \quad \lambda = 104'''0$$
$$b = 18'''0 \quad \text{und} \quad n = 1'''8$$

ist, so wird

$$s = 0{\cdot}273 \cdot a + 20{\cdot}20$$
$$K = 0{\cdot}273 . a^2 + 148{\cdot}00 . a + 6735{\cdot}3.$$

6. Der Boden des Glasgefässes wird nach (Nr. 4) zu behandeln sein. Da

$$m = 0{\cdot}132 \text{ Pfund}, \quad \xi = 127'''5 \quad r = 13'''0$$

gefunden wurde, so erhält man

$$s = 0{\cdot}132 . a + 16{\cdot}83$$
$$K = 0{\cdot}132 . a^2 + 33.66 . a + 2151{\cdot}4.$$

7. Die cylindrische Glaswand. Ist h die Höhe des Cylinders, $a + \xi$ der Abstand seiner oberen Basis von dem Punkte ω, m das Gewicht der Masse, so ist das statische Moment

$$s = m\left(a + \xi + \frac{h}{2}\right);$$

für das Moment der Trägheit eines Cylinders ähnlicher Dimensionen erhielten wir früher (Nr. 4)

$$K = \pi \varphi r^2 h \left\{(a + \xi)^2 + (a + \xi) h + \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right\}.$$

Differentiiren wir diesen Ausdruck in Beziehung auf r, so erhalten wir offenbar das Mom. inertiae der Wandung. Bedenken wir dabei dass

$$2 \varphi \pi r h\, dr = m$$

das Gewicht der Glaswandung ist, so erhalten wir für das Moment der Trägheit den Ausdruck

$$K = m \left\{(a + \xi)^2 + (a + \xi) h + \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{2}\right\}.$$

In unserem Falle ist aber

$$m = 0{\cdot}813 \text{ Pfund}, \quad h = 90'''8$$
$$\xi = 38'''9 \qquad r = 13{\cdot}0$$

daher auch

$$3 = 0{\cdot}813 . a + 68{\cdot}54$$
$$K = 0{\cdot}813 . a^2 + 137{\cdot}08 . a + 6405{\cdot}0.$$

8. Das Quecksilber. Das statische Moment dieser Masse ist durch

$$s = Q\left(a + \xi + \frac{h}{2}\right),$$

das Moment der Trägheit durch

$$K = Q \left\{(a + \xi)^2 + (a + \xi) h + \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right\}$$

gegeben.

Die Höhe des Quecksilbers ist durch h, dessen Gewicht durch Q ausgedrückt, und ξ bezeichnet den Abstand der oberen Quecksilberfläche vom Punkte ω. Nun ist aber ξ selbst wiederum von h abhängig

und es ist, wenn θ den Abstand der inneren Bodenfläche des Glasgefässes vom Punkte o ausdrückt

$$\xi = \theta - h.$$

Führen wir die Werthe in die oberen Ausdrücke ein, so wird

$$s = \left(a + \theta - \frac{h}{2}\right) Q$$

und

$$K = Q \left\{a^2 + (2\theta - h)\, a - \theta h + \theta^2 + \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right\};$$

für unser Pendel ist sehr nahe

$$\theta = 10{\cdot}557 \text{ Pfund} \quad \theta = 125'''1$$
$$r = 13'''0 \quad h = 77{\cdot}7,$$

daher auch

$$s = 10{\cdot}557 . a + 910{\cdot}54 =$$
$$K = 10{\cdot}557 . a^2 + 1821{\cdot}18 . a + 84290{\cdot}0$$

oder auch wenn wir Q und h besonders auszeichnen, was die Berechnung der Änderungen der Momente erleichtert:

$$s = Q \left\{a + 125{\cdot}1 - \frac{h}{2}\right\}$$
$$K = Q \left\{a^2 + (250{\cdot}2 - h)\, a - 125{\cdot}1 . h + \frac{h^2}{3} + 15692{\cdot}0\right\}.$$

9. Bringt man die Momente der angeführten Bestandtheile in eine Summe, so erhält man das statische Moment, sowie auch das Trägheits-Moment des ganzen Parallels. In diesen Ausdrücken erscheint $wo = a$ noch unbestimmt und zwar desshalb, weil ich keine Mittel hatte, diese Länge mit annähernder Genauigkeit zu messen. Sie lässt sich übrigens aus dem beobachteten Gange der Uhr den bestehenden Verhältnissen angemessen bestimmen. Denn da der beobachtete tägliche Gang der Uhr der Länge eines mathem. Pendels von $450'''3$ W. M. entsprach, so hat man nach I Gl. (5) die Bedingungsgleichung

$$\frac{a^2 + 162{\cdot}16 . a + 7547{\cdot}5}{1{\cdot}0093 . a + 81{\cdot}081} = 450{\cdot}3,$$

woraus man sofort

$$a = 370'''49$$

findet.

10. Um nun den Grad der Vollkommenheit der Compensation beurtheilen zu können, werden die Änderungen die die Momente

des Pendels in Folge der Änderungen der Temperatur erfahren, entwickelt werden müssen. Bezeichnet man durch S^0 und K^0 das statische und das Trägheits-Moment des ganzen Pendels und durch

$$\left(\frac{dS^0}{dt}\right) \quad , \quad \left(\frac{dK^0}{dt}\right)$$

die Änderungen derselben für einen Grad der Temperatur-Änderung, so ist, wenn man

$$0\cdot000041683 = \alpha \qquad 0\cdot0001126 = \beta$$
$$0\cdot00001440 = \mu \qquad 0\cdot0016041 = \gamma$$
$$0\cdot0017553 = \delta$$

setzt,

$$\left(\frac{dS^0}{dt}\right) = (\alpha + \mu Q)\, a - \beta Q \,.\, h + \delta Q + \gamma. \tag{27}$$

Ebenso ist, wenn

$$0\cdot00008200 = \alpha^0 \qquad 0\cdot007042 = \gamma^0 \qquad 0\cdot00015013 = \varepsilon^0$$
$$0\cdot011714 = \beta^0 \qquad 0\cdot0002396 = \delta^0 \qquad 0\cdot5430 = \varkappa^0$$
$$0\cdot029291 = \lambda^0 \text{ und } 0\cdot8609 = \mu^0$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{dK^0}{dt}\right) = (\alpha^0 + 2\mu Q)\, a^2 + \{\beta^0 + (\gamma^0 - \delta^0 h)\, Q\} \,.\, a$$
$$+ \{\varepsilon^0 h - \lambda^0\}\, Q h \tag{28}$$
$$+ (\varkappa^0 + \mu^0 Q).$$

Da wir nun früher

$$Q = 10\cdot557$$
$$h = 77\cdot7$$
$$a = 370\cdot49$$

gefunden haben, so erhalten wir auch durch geeignete Substitution dieser Zahlenwerthe

$$S^0 = 6098\cdot8$$

$$\left(\frac{dS^0}{dt}\right) = -\,0\cdot000469$$

und

$$\left(\frac{dK^0}{dt}\right) = 7\cdot228;$$

welche Werthe in die Gleichung I (6) eingeführt, sofort

$$dL = +\,0'''00122 \tag{29}$$

geben.

Diese Verlängerung erfährt somit das Pendel für jeden Grad der Temperatur-Zunahme, was, da die Uhr sehr nahe nach Sternzeit geht, nach II. Gl. (20)

$$d\xi = +\,0^{s}117 \qquad (30)$$

d. h. eine tägliche Retardation der Uhr von 0·117 Secunden gibt.

Dieses Resultat stimmt mit der Beobachtung in der That besser überein, als ich erwarten durfte. Die Beobachtung gibt nämlich, für einen Grad der Temperatur-Zunahme eine tägliche Retardation von

0·103

Secunden, was von dem durch Rechnung gefundenen Werthe nur um $0^{s}014$ abweicht.

11. Es wird sich nunmehr darum handeln, diejenige Quecksilbermenge und diejenige Grösse zu berechnen, um welche Q und a geändert werden müssen, um die Compensation vollständig zu machen; wobei überdies der Gang der Uhr unberührt bleiben soll. Zu diesem Ende wird man die Ausdrücke (27) und (28), als auch die Momente S und K in Beziehung auf a und h zu Differentiiren haben. Thut man dies und setzt man

$$\alpha + \mu Q = \varphi$$

$$(\mu a + \delta - 2\beta h)\frac{Q}{h} = \varphi',$$

so wird das Differentiale von (27),

$$d\left(\frac{dS^0}{dt}\right) = \varphi\, da + \varphi'\, dh \qquad (31)$$

und wenn man

$$2{\cdot}971 + Q = \varphi^0$$

$$a + 125{\cdot}1 - \left(\frac{Q+h}{2}\right) = \varphi_0'$$

setzt, ebenso das Differentiale des statischen Momentes

$$dS^0 = \varphi_0\, da + \varphi_0'\, dh. \qquad (32)$$

Setzt man ferner

$$\{2(\alpha^0 + 2\mu Q)a + [\beta^0 + \gamma^0 - \delta^0 h)Q]\} = \psi$$

$$\{2a^2\mu + (\gamma^0 - \delta^0 h)a + (\varepsilon^0 h - \lambda^0)h + \mu^0\}\,.\frac{Q}{h} = \psi'$$

$$\{2\varepsilon^0 h - (\lambda^0 + a\delta^0)\}\,.\,Q = \psi''$$

so wird, erhält man für das Differentiale von (28) den Ausdruck:

$$d\left(\frac{d\,K^0}{d\,t}\right) = \psi\,d\,a + (\psi' + \psi'')\,d\,h\,,$$

setzt man dagegen

$$2\,a\,\{Q + 2\cdot8473\} + \{Q\,(250\cdot2 - h) + 352\cdot51\} = \psi^0$$

$$\left\{\frac{2\,h}{3} - (a + 125\cdot161\right\}\,Q = \psi'_0$$

und

$$\left\{a^2 + (250\cdot2 - h)\,a + \left\{\frac{h^3}{3} - 125\cdot16\right\}h + 15692\cdot0\right\}\cdot\frac{Q}{h} = \psi''_0$$

so wird das Differentiale des Trägheits-Momentes

$$dK^0 = \psi_0\,da + (\psi_0' = \psi_0'')\,dh \qquad (34)$$

Führt man die Rechnung mit den gegebenen Werthen von a, h . . . aus, so findet man für unseren vorliegenden Fall

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= 0\cdot00019370\\ \varphi' &= -\,0\cdot00141407\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi &= 0\cdot17556\\ \psi' &= -\,0\cdot11470\\ \psi'' &= -\,1\cdot00010\end{aligned}\right\}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= 13\cdot528\\ \varphi_0' &= 56\cdot781\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= 12105\cdot4\\ \psi^{0\prime} &= -4685\cdot9\\ \psi_0'' &= 28413\cdot0\end{aligned}\right\}$$

12. Kehren wir nun zu unseren Gleichungen (5) und (6) zurück, so kömmt es darauf an, die Werthe von $d\,a$ und $d\,h$ so zu bestimmen, dass die Änderung die das rechte Glied vom Gleichheitszeichen in Gl. (5) erfährt = 0, und die Änderung die das gleichnamige Glied in Gl. (6) erfährt, gleich dem von uns berechneten Werthe von $-d\,L$ (29) werde. Nimmt man auf diese Bedingungen Rücksicht und führt man die nöthigen Substitutionen durch, so führt dies, wenn überdies

$$\psi - \varphi\,L = u$$

$$(\psi' + \psi'') - \varphi'\,L = w$$

$$S^0 d\,L = C,$$

und dann

$$\psi_0 - \varphi_0 L = u'$$
$$(\psi'_0 + \psi''^0) - \varphi'_0 L = w'$$

gesetzt wird, zu den Endgleichungen

$$\begin{aligned} u\,da + w\,dh + C &= o \\ u'\,da + w'\,dh \quad &= o. \end{aligned} \tag{35}$$

Aus diesen ergibt sich unmittelbar

$$dh = -\frac{u'}{wu' - w'u}.C$$
$$da = \frac{w'}{wu' - w'u}.C, \tag{36}$$

und endlich ist

$$dQ = \frac{Q}{h}.dh.$$

Führt man die Rechnung vollständig durch, so findet man für das in Rede stehende Pendel

$$\begin{aligned} dh &= 16'''498 \\ da &= 5\cdot051 \\ dQ &= 2\cdot242 \text{ Pfund.} \end{aligned} \tag{37}$$

13. Bei der ziemlichen Umständlichkeit der Rechnung wird es wünschenswerth, das erhaltene Resultat einer Prüfung zu unterwerfen. Auch sind die erhaltenen Werthe von dh und da keineswegs so klein, wie sie in den zu Grunde gelegten Betrachtungen nothwendig vorausgesetzt werden mussten, und es wird auch schon desshalb wünschenswerth, die Rechnung mit den neuen, mit den verbesserten Werthen so weit nöthig zu wiederholen, was eben nicht sehr beschwerlich wird. Die verbesserten Werthe von h, a, Q, die wir von den ursprünglichen Werthen durch Striche ober den Buchstaben unterscheiden wollen, sind

$$\begin{aligned} h' &= 94'''198 \\ a' &= 375\cdot54 \\ Q &= 12\cdot799 \text{ Pfund.} \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen erhalten wir für die Momente des ganzen Pendels die Grössen

$$\begin{aligned} S^0 &= 7096\cdot82 \\ K^0 &= 3193410\cdot3, \end{aligned}$$

daher auch

$$L = 449^{\prime\prime\prime}94$$

was, von der ursprünglichen Länge $450^{\prime\prime\prime}3$ nur um $0^{\prime\prime\prime}36$ abweicht und, da alles nur mit 5stelligen Logarithmen gerechnet wurde, als eine ganz nahe Übereinstimmung angesehen werden darf.

Ferner erhält man

$$\frac{dS^0}{dt} = -\ 0 \cdot 02681$$

$$\frac{dK^0}{dt} = -\ 13 \cdot 393,$$

mithin auch nach I. Gleichung (6)

$$dL = -\ 0^{\prime\prime\prime}000187$$

$$d\xi = -\ 0 \cdot 0180;$$

wodurch die Compensation bedeutend verbessert erscheint.

Berechnet man mit diesen verbesserten Werthen h', a' neuerdings die an dieselben anzubringenden Correctionen, so findet man, den letzt entwickelten Ausdrücken folgend:

$$dh' = -\ 2^{\prime\prime\prime}190$$

$$da' = -\ 0 \cdot 750 \qquad (38)$$

$$dQ = -\ 0 \cdot 297 \text{ Pfund.}$$

Addiren wir diese Verbesserungen zu den früher gefundenen III. (37) Werthen, so erhalten wir als Endresultat für die vorzunehmenden Änderungen

$$dh'' = 14^{\prime\prime\prime}308$$

$$da'' = 5 \cdot 051 \qquad (39)$$

$$dQ'' = 1 \cdot 944$$

womit die Rechnung abgeschlossen erscheint.

Um alles zu controliren, kann man die Rechnung, so weit nöthig, mit den zwei verbesserten Werthen, nämlich mit

$$h'' = 92^{\prime\prime\prime}008$$

$$a'' = 374 \cdot 49$$

$$Q'' = 12 \cdot 502$$

durchführen. Thut man dies, so findet man

$$S^0 = 6964 \cdot 3 \qquad K^0 = 3133792 \cdot 3$$

und

$$L = 449^{\prime\prime\prime}98$$

wie früher. Eben so erhält man ferner

$$\frac{d\ S^0}{d\ t} = -0 \cdot 022879 \quad \text{und} \quad \frac{d\ K^0}{d\ t} = -10 \cdot 310$$

mithin

$$dL = -0''0000021$$

und

$$d\xi = -0''000202.$$

Die Compensation erscheint also durch diese neuen Werthe bis auf zwei Zehntausendstel einer Secunde hergestellt, was wohl für alle Fälle ausreicht.

Die hier gefundenen Correctionen der Quecksilbermenge und der Länge der Pendelstange, sind der Rechnungen so vollkommen als thunlich angepasst. Inzwischen stimmt, wie wir gesehen haben (III. 30), die Rechnung mit der Beobachtung nicht vollkommen überein. Da wir aber durch die Rechnung einen sicheren Massstab für das Verhältniss zwischen der Grösse dieser Correctionen und den Variationen des Ganges der Uhr erhalten haben, so wird es nicht schwer werden, diese Verbesserungen so zu modificiren, dass dadurch den Ergebnissen der Beobachtung vollständige Rücksicht getragen werde.

In unserem Falle erhielten wir aus der Beobachtung

$$d\xi = 0{\cdot}103,$$

während die Rechnung

$$d\xi = 0{\cdot}117$$

gab. Da nun die Correctionen dh, da auf Grund des letzteren Werthes berechnet sind, so werden wir sie in dem Verhältnisse von 103 : 117 zu vermindern haben, um der factischen Unvollständigkeit der Compensation des Pendels abzuhelfen.

Man wird also, um die Compensation des genannten Pendels so viel möglich vollständig herzustellen, die Höhe der Quecksilbersäule um

12·553 Wiener Mass

vergrössern oder was dasselbe ist (40)

1·706 Pfund

Quecksilber zugiessen, gleichzeitig aber auch, durch Hilfe der Schraubenmutter π die Pendelstange um

$3''773$

verlängern müssen.

Auf diesem oder einem ähnlichen Wege wird man, wie ich glaube, die Regulirung der Compensation mit Sicherheit bewerkstelligen können, und wenn auch die Durchführung derselben nicht ganz gering ist, so wird die darauf verwendete Mühe doch durch die

kurze Zeit, in welcher man mit diesem Geschäfte fertig wird und die Beruhigung die darin liegt, dass man sich jedes Schrittes, den man thut, vollkommen bewusst ist, mehr als hinreichend entschädiget. In der Praxis endlich wird man noch eine untrügliche Prüfung des Ganzen schnell dadurch erhalten, dass man den täglichen Gang der Uhr nach vollbrachter Zugabe oder Wegnahme der berechneten Quecksilber-Menge und nach vollzogener Verlängerung oder Verkürzung der Pendelstange, mit dem ursprünglichen Gange der Uhr vergleicht. Findet man in beiden Fällen, für diesen täglichen Gang der Uhr, dieselben oder sehr nahe dieselben Werthe, so darf man mit allem Rechte annehmen, dass alles in bester Ordnung sei.

So unzweifelhaft die Sache auch an sich ist, so haben mich doch die grossen Werthe der nöthigen Correctionen überrascht, und es war mir sehr daran gelegen mich, bei den Erfahungen anderer Rathes zu erholen. Es war mir daher sehr erwünscht in Bode's Jahrbuch auf das Jahr 1810, die Beschreibung eines Mercurial-Pendels von Thomas Blacker aus London zu finden. Die Dimensionen dieses Pendels stimmen mit jenen des unseren so nahe überein, als dies bei Copien die durch mehrere Hände gegangen sind, nur immer der Fall ist. „Falls dieses Pendel", so heisst es dort pag. 223, „in 30 Grad „Fahrenheit sehr richtig geht, aber in 90 Grad eine Secunde in „24 Stunden verliert, so müssen 20 Loth Quecksilber mehr in das „Glas gethan werden, und so umgekehrt. Es folgt also daraus, „dass das Zuthun oder Wegnehmen von 2 Loth Quecksilber dieses „Pendel auf $^1/_{10}$ einer Secunde in 24 Stunden compensirt, wenn es „entweder zu langsam oder zu geschwind in verschiedenen Tempera-„turen vibrirt."

Nun diese Folgerung (Bode's) ist nicht präcis, jene 20 Loth beziehen sich auf die Temperatur-Differenz von 60 Grad Fahrenheit oder 26·7 Réaumur. Wenn der Gang der Uhr bei einer Temperatur-Änderung von einem Grad Réaumur um 1 Zoll variirt, so wird 26·7mal mehr Quecksilber zur Herstellung der Compensation verwendet werden müssen, was für eine Variation des Ganges die Uhr von

$$0''103$$

für 1 Grad R., wie dies hier der Fall ist, ein Quecksilber-Quantum von

$$1·72 \text{ Pfund}$$

ausmacht, was überaus gut mit dem Resultate näherer Rechnung (40) übereinstimmt.
